

# Robotik I: Einführung in die Robotik

## Kinematik

**Tamim Asfour**

Institut für Anthropomatik und Robotik

KIT-Fakultät für Informatik, Institut für Anthropomatik und Robotik (IAR)  
Hochperformante Humanoide Technologien (H<sup>2</sup>T)



# Robotermodellierung

- Geometrische Modellierung
  - **Geometrie:** Mathematische Beschreibung der **Form von Körpern**
- Kinematische Modellierung
  - **Kinematik:** Lehre der geometrischen und analytischen Beschreibung der **Bewegungszustände mechanischer Systeme**
- Dynamische Modellierung
  - Dynamik:** Untersuchung der **Bewegung von Körpern** als Folge der auf sie wirkenden **Kräfte und Momente**

# Inhalt

- Kinematisches Modell
  - Kinematische Kette
  - Denavit-Hartenberg Konvention
  - Direktes Kinematisches Problem
  - Beispiele
  - Jacobi-Matrizen
  - Singularitäten und Manipulierbarkeit
  - Repräsentation der Erreichbarkeit
  
- Geometrisches Modell
  - Einsatzbereiche
  - Klassifizierung
  - Beispiele

# Inhalt

## ■ Kinematisches Modell

- Kinematische Kette
- Denavit-Hartenberg Konvention
- Direktes Kinematisches Problem
- Beispiele
- Jacobi-Matrizen
- Singularitäten und Manipulierbarkeit
- Repräsentation der Erreichbarkeit

## ■ Geometrisches Modell

- Einsatzbereiche
- Klassifizierung
- Beispiele

# Kinematisches Modell

## ■ Definition

- Das **kinematische Modell** eines Roboters beschreibt die Zusammenhänge zwischen dem **Raum der Gelenkwinkel** (Roboterkoordinaten, Konfigurationsraum) und dem **Raum der Lage des Endeffektors** in Weltkoordinaten (Arbeitsraum, Kartesischer Raum).

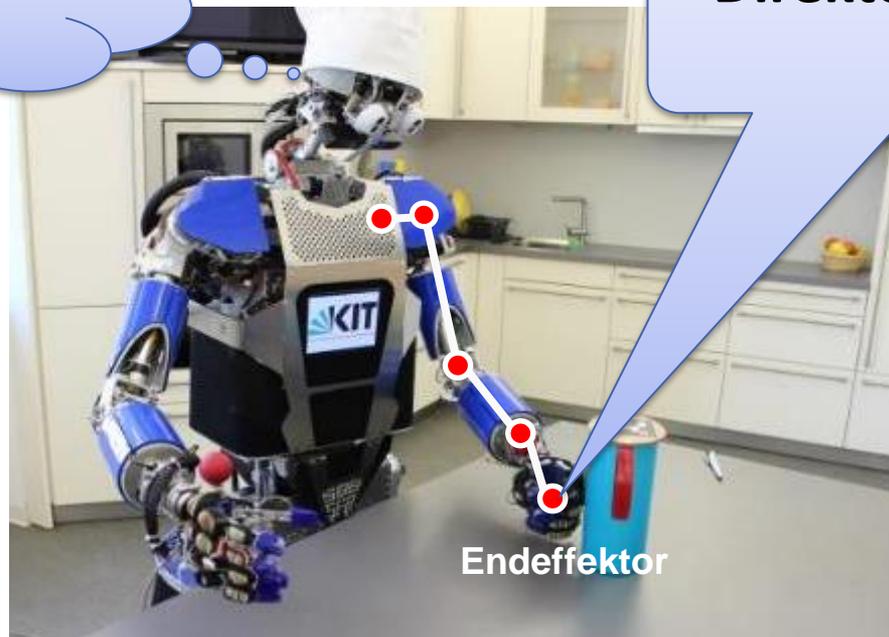
## ■ Einsatzbereiche

- Bestimmung des Zusammenhangs zwischen **Gelenkwerten** und **Stellungen** des Roboters
- **Erreichbarkeitsanalyse**
- Relation zwischen **Körpern des Roboters** (Selbstkollision)
- Relation zur **Umgebung** (Kollisionserkennung)

# Vorwärtskinematik

- **Direktes** kinematisches Problem (Vorwärtskinematik)
  - **Bestimmung der Lage des Endeffektors** aus den Gelenkwinkelstellungen des Roboters.

Wo ist meine Hand?



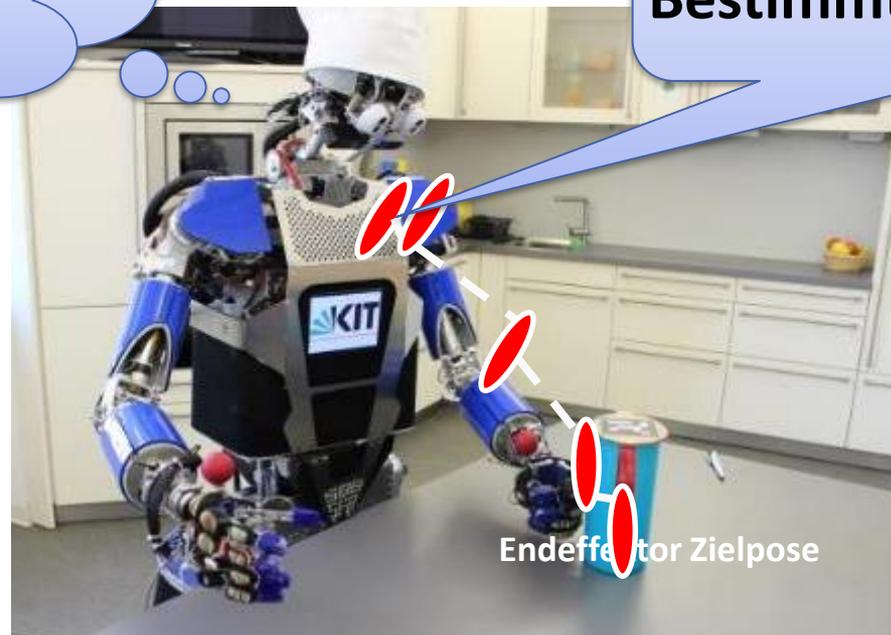
Direkte Kinematik:  
**HIER!**

# Inverse Kinematik

- **Inverses** kinematisches Problem (Rückwärtskinematik)
  - **Bestimmung der Gelenkwinkelstellungen** zu einer gewünschten Lage des Endeffektors.

Wie bewege ich  
meine Hand  
zum Becher?

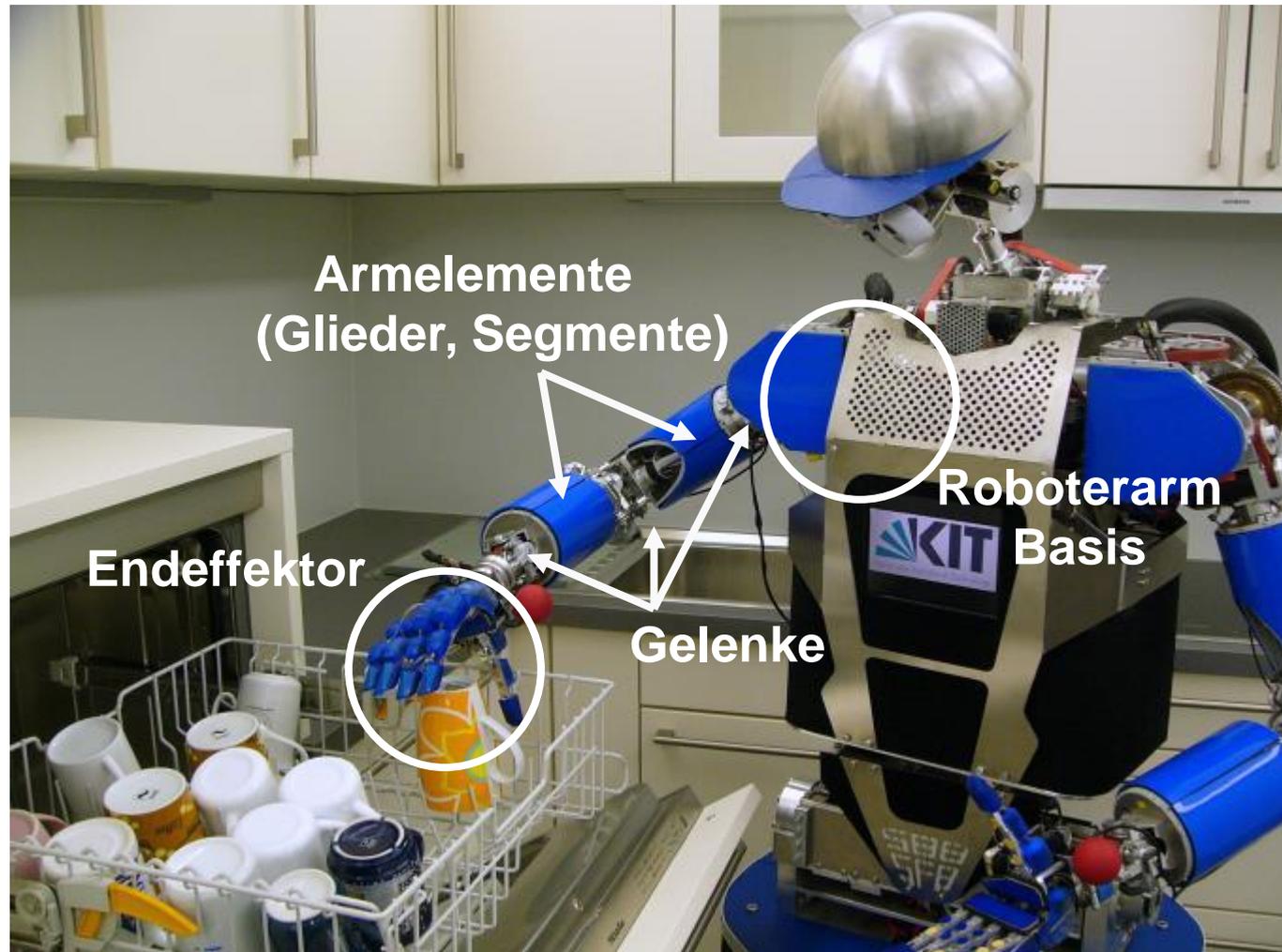
**Inverse Kinematik:  
Bestimmt die Gelenkwinkel**



# Inhalt

- Kinematisches Modell
  - **Kinematische Kette**
  - Denavit-Hartenberg Konvention
  - Direktes Kinematisches Problem
  - Beispiele
  - Jacobi-Matrizen
  - Singularitäten und Manipulierbarkeit
  - Repräsentation der Erreichbarkeit
  
- Geometrisches Modell
  - Einsatzbereiche
  - Klassifizierung
  - Beispiele

# Elemente einer kinematischen Kette

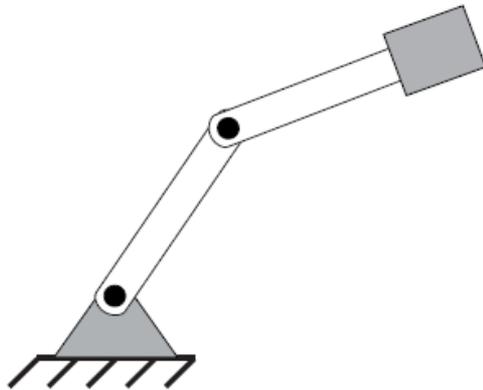


# Kinematische Kette

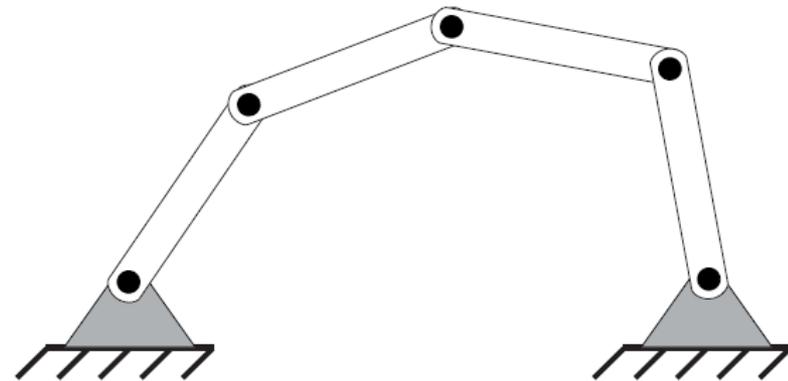
## ■ Definition

- Eine kinematische Kette wird von **mehreren Körpern** gebildet, die durch **Gelenke kinematisch verbunden** sind (z. B.: Roboterarm).

## ■ Typen



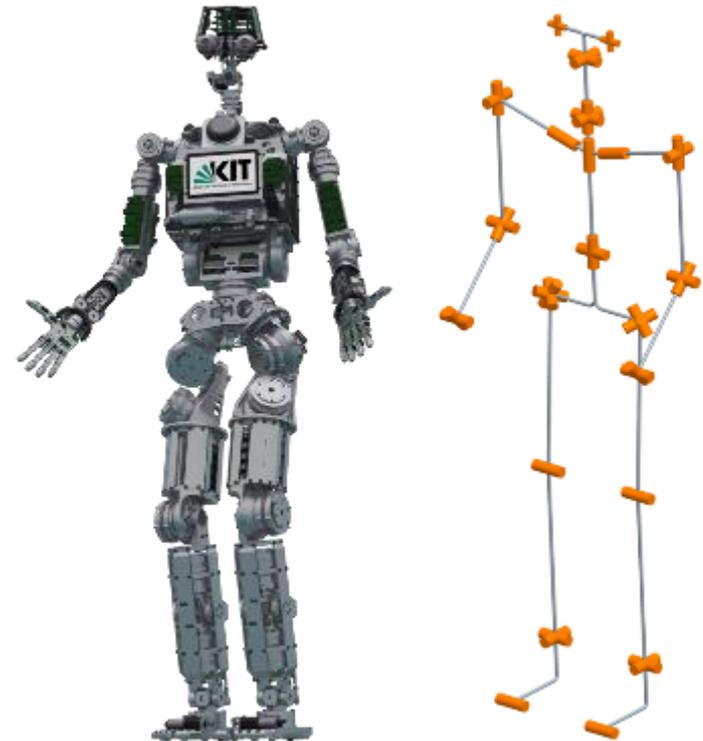
**Offene** kinematische Kette



**Geschlossene** kinematische Kette

# Kinematische Kette: Konventionen

- Jedes **Armelement** entspricht einem **starr**en Körper.
- Jedes Armelement ist mit dem nächsten durch ein **Gelenk** verbunden.
- Bei Schub- und Rotationsgelenken: Jedes **Gelenk** hat nur **einen Bewegungsfreiheitsgrad** (Rotation oder Translation)
- **Kinematische Parameter:**
  - Gelenkdefinition (z.B. Rotationsachse)
  - Transformation zwischen den Gelenken



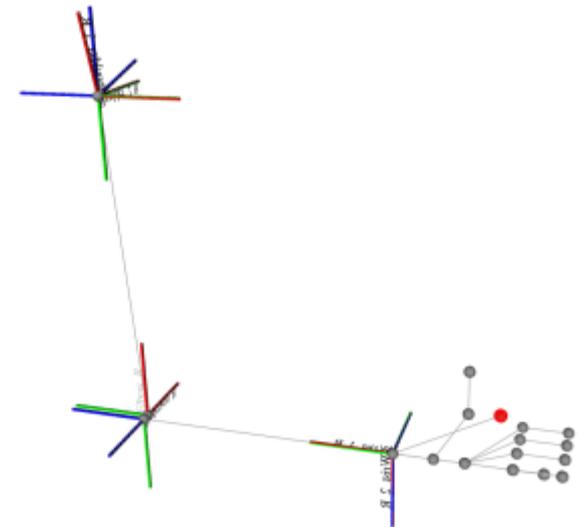
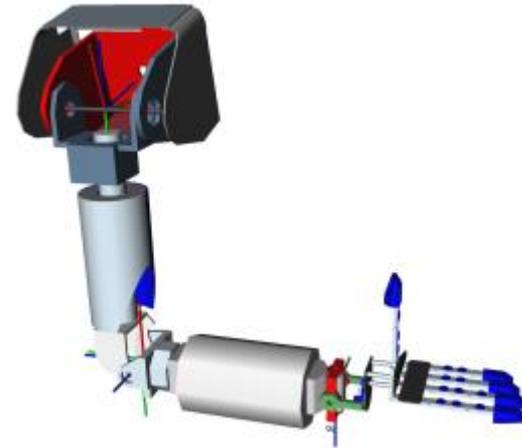
# Kinematische Parameter

## ■ Gelenkparameter

- Rotationsgelenk: Rotationsachse
- Schubgelenk: Translationsrichtung
- ...

## ■ Spezifikation der Lage der Gelenke zueinander

- Feste Transformation zwischen zwei Gelenken
- Definiert die lokalen Koordinatensysteme der Gelenke
- Transformation von Gelenk  $i - 1$  zu Gelenk  $i$  durch Transformationsmatrix  ${}^{i-1}T_i$



# Anzahl Parameter der kinematischen Kette

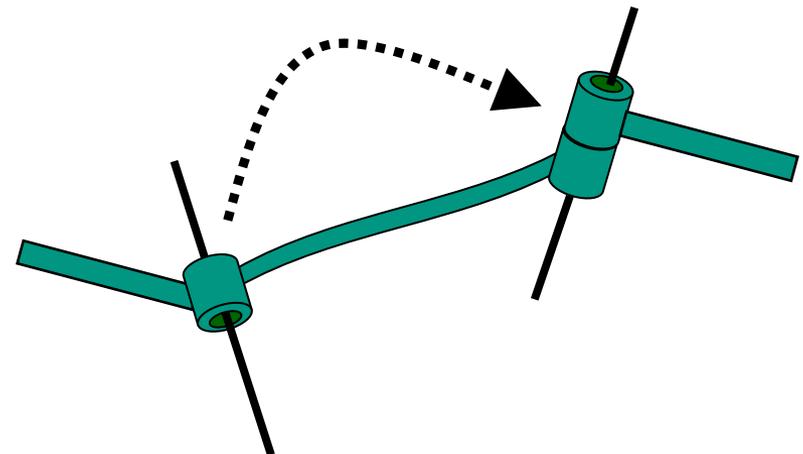
- Für jedes Glied muss eine **Transformation** bestimmt werden:
    - 3 Rotationsparameter
    - 3 Translationsparameter
- **6 Parameter** pro Glied der kinematischen Kette

# Inhalt

- Kinematisches Modell
  - Kinematische Kette
  - **Denavit-Hartenberg Konvention**
  - Direktes Kinematisches Problem
  - Beispiele
  - Jacobi-Matrizen
  - Singularitäten und Manipulierbarkeit
  - Repräsentation der Erreichbarkeit
- Geometrisches Modell
  - Einsatzbereiche
  - Klassifizierung
  - Beispiele

# Denavit-Hartenberg (DH) Konvention

- Ziel
  - **Reduktion der Parameter** zur Beschreibung eines Armelementes
- Eigenschaften
  - Systematische Beschreibung der Beziehungen (**Translationen** und **Rotationen**) **zwischen benachbarten Gelenken**
  - Reduktion der Anzahl **Parameter von 6 auf 4**



Literatur: Denavit, Hartenberg: „A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Bases on Matrices“, Journal of Applied Mechanics, 1955, vol 77, pp 215-221

# DH Konvention für Wahl der Koordinatensysteme

- Jedes Koordinatensystem wird auf Basis der folgenden drei Regeln bestimmt:
  1. Die  $z_{i-1}$ -Achse liegt entlang der **Bewegungsachse** des  **$i$ -ten Gelenks**.
  2. Die  $x_i$ -Achse verläuft entlang der gemeinsamen **Normalen** (*common normal*) von  $z_{i-1}$  und  $z_i$ . Dabei zeigt sie weg von  $z_{i-1}$ .
  3. Die  $y_i$ -Achse vervollständigt das Koordinatensystem entsprechend der **Rechte-Hand-Regel**.

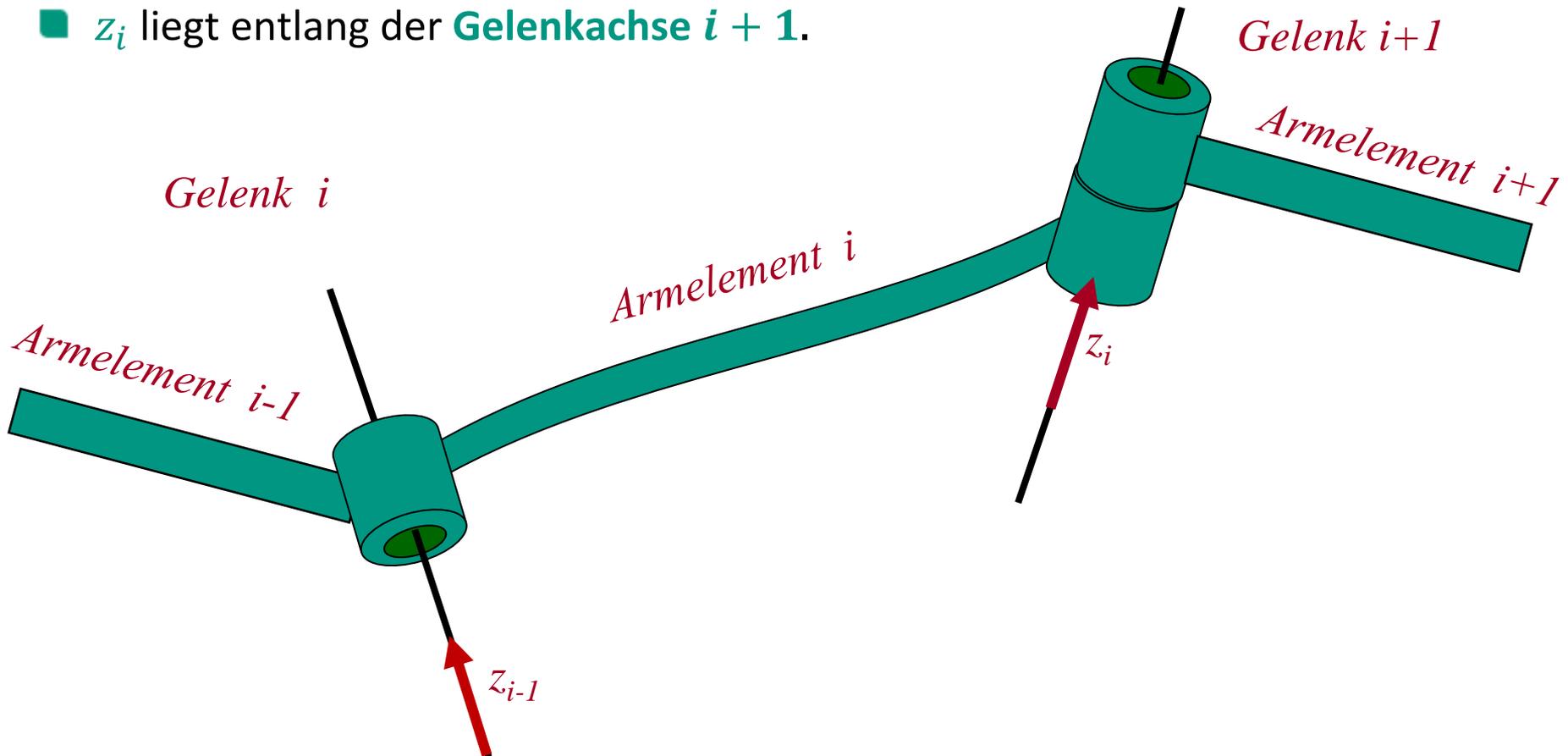
$$i \in \{Basis, 1, \dots, n\}$$

→ Herleitung der Parameter für Armelement und Gelenk

- Anmerkung: In der Literatur finden sich auch andere Varianten der DH-Konvention

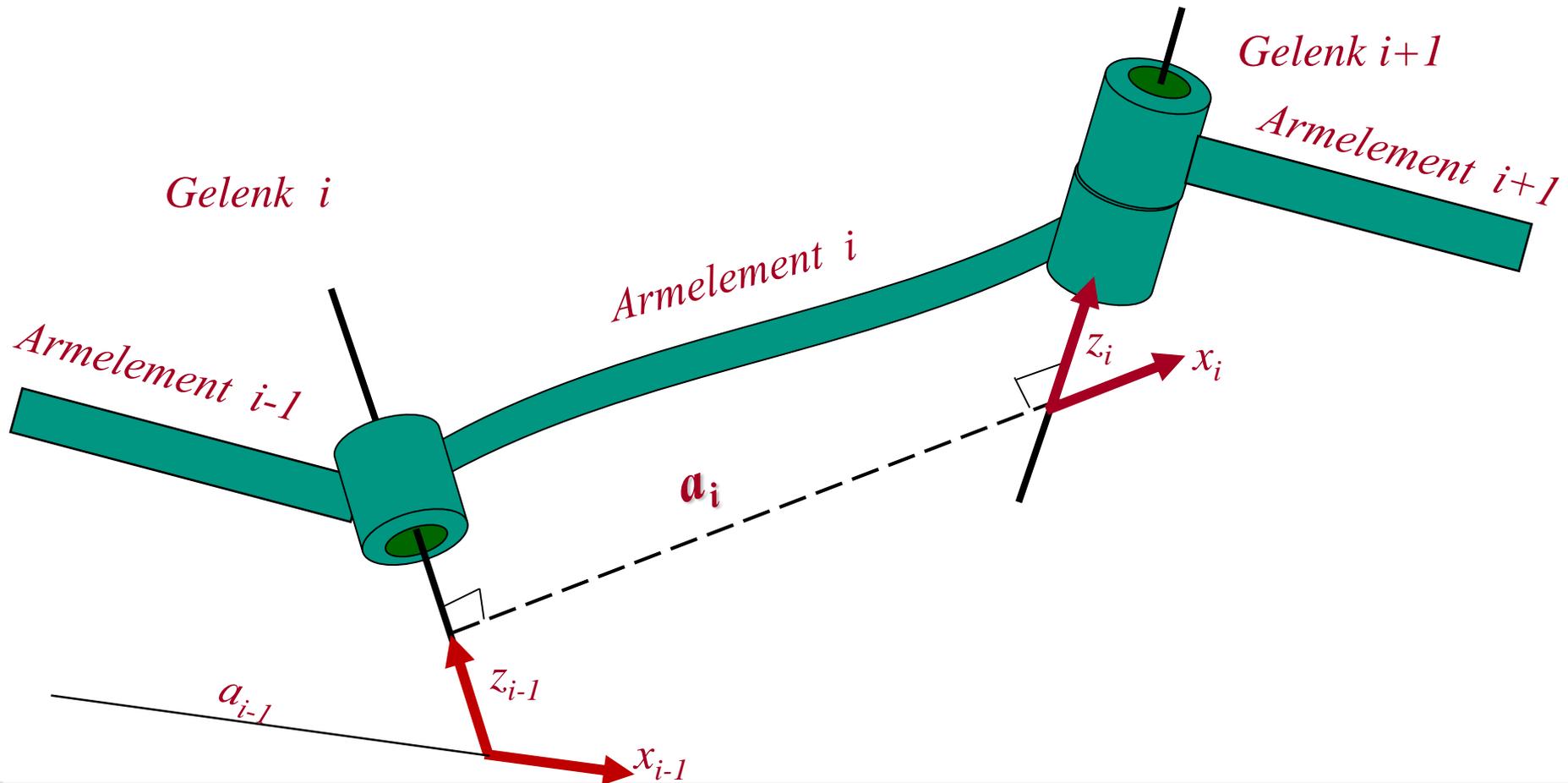
# DH-Konvention: Parameter des Armelements

- Jedes **Armelement**  $i$  ist durch zwei begrenzende **Gelenke**  $i$  und  $i + 1$  eingebunden.
- $z_i$  liegt entlang der **Gelenkachse**  $i + 1$ .



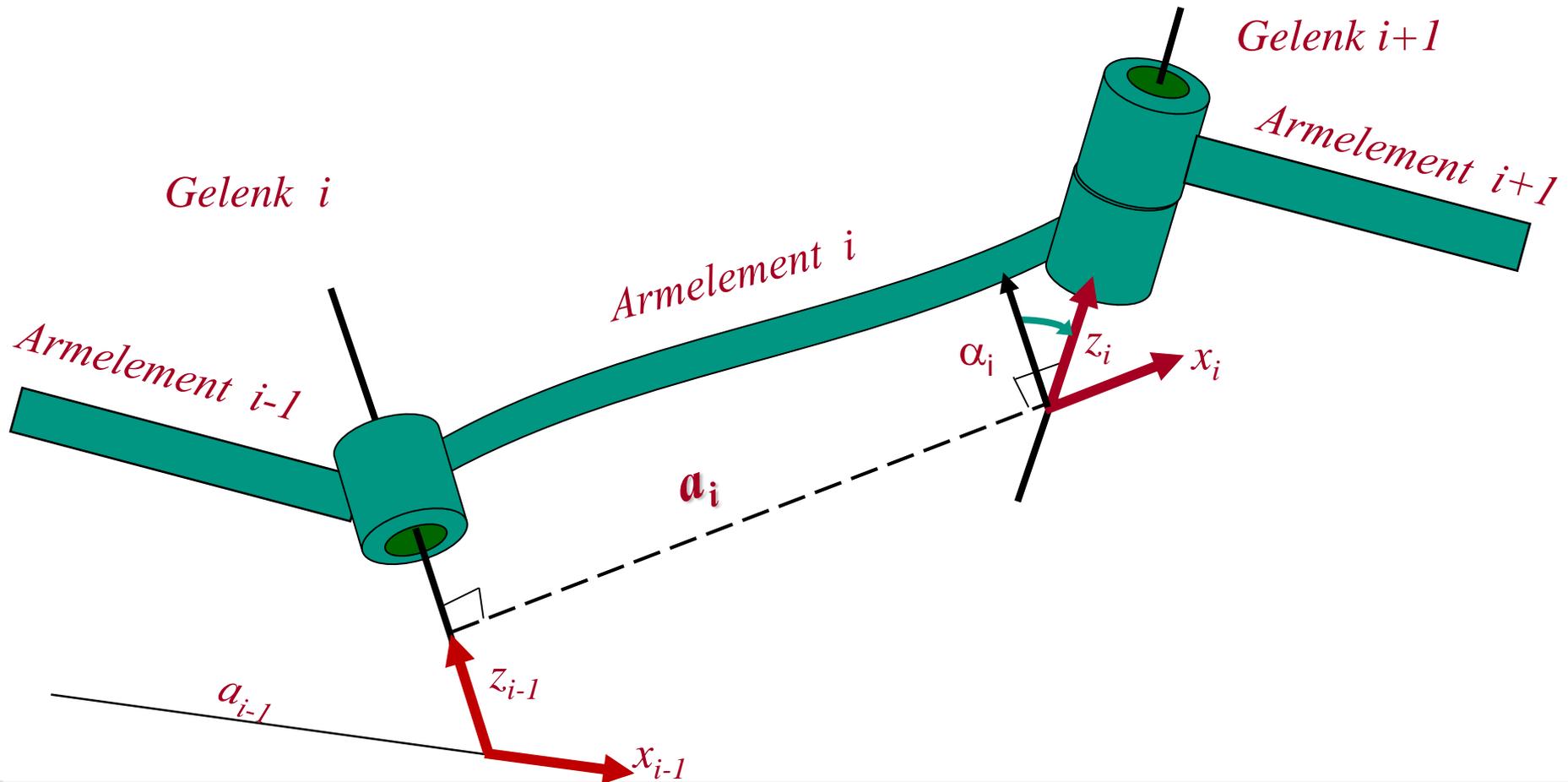
# DH-Konvention: Parameter des Armelements II

- Die **Armelementlänge**  $a_i$  beschreibt den **Abstand** von  $z_{i-1}$  zu  $z_i$ .
- $x_i$  liegt entlang der **Normalen von  $z_{i-1}$  und  $z_i$**  und zeigt weg von  $z_{i-1}$ .



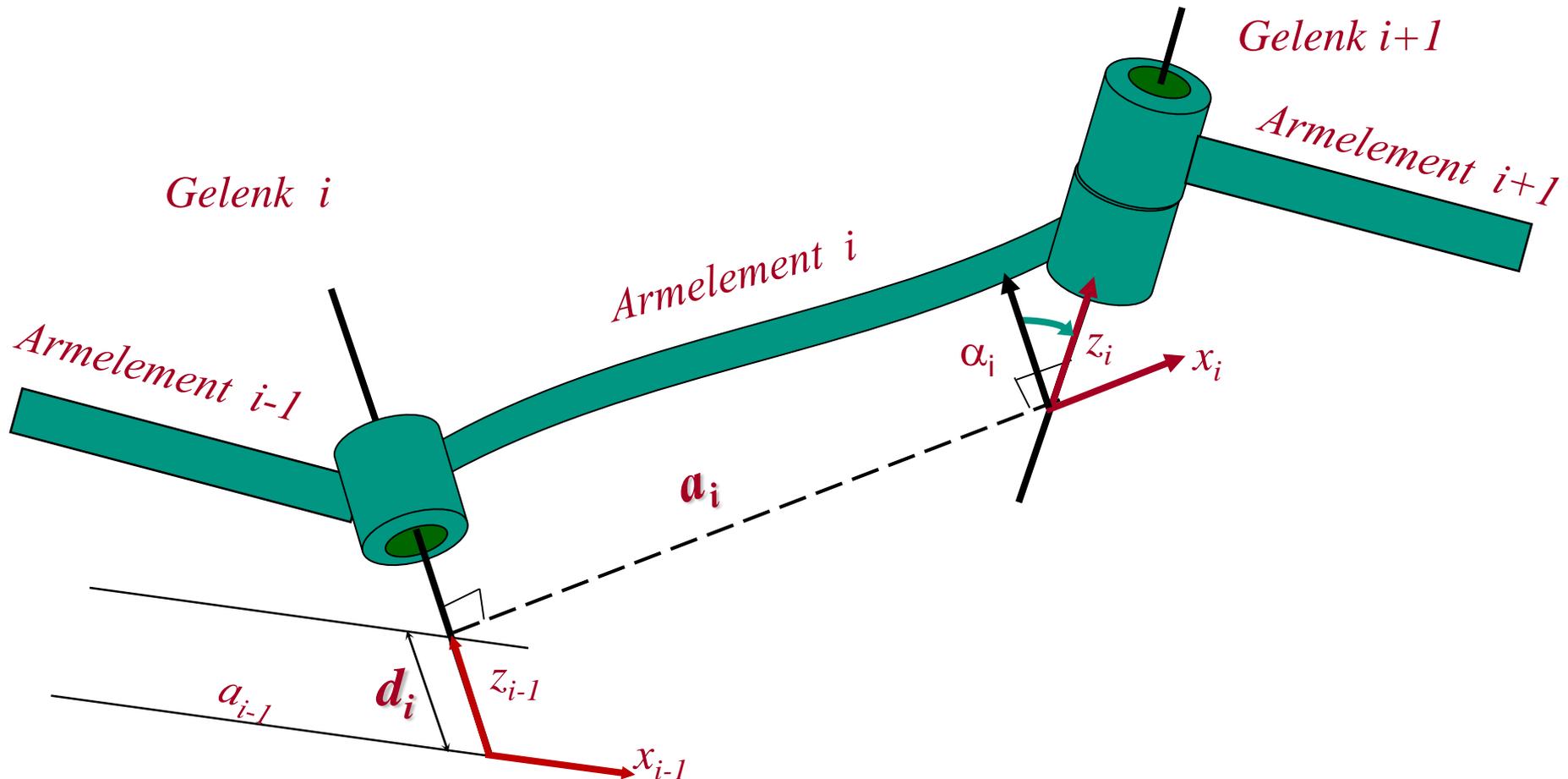
# DH-Konvention: Parameter des Armelements III

- Die **Armelementverwindung**  $\alpha_i$  beschreibt den **Winkel** von  $z_{i-1}$  zu  $z_i$  **um**  $x_i$ .



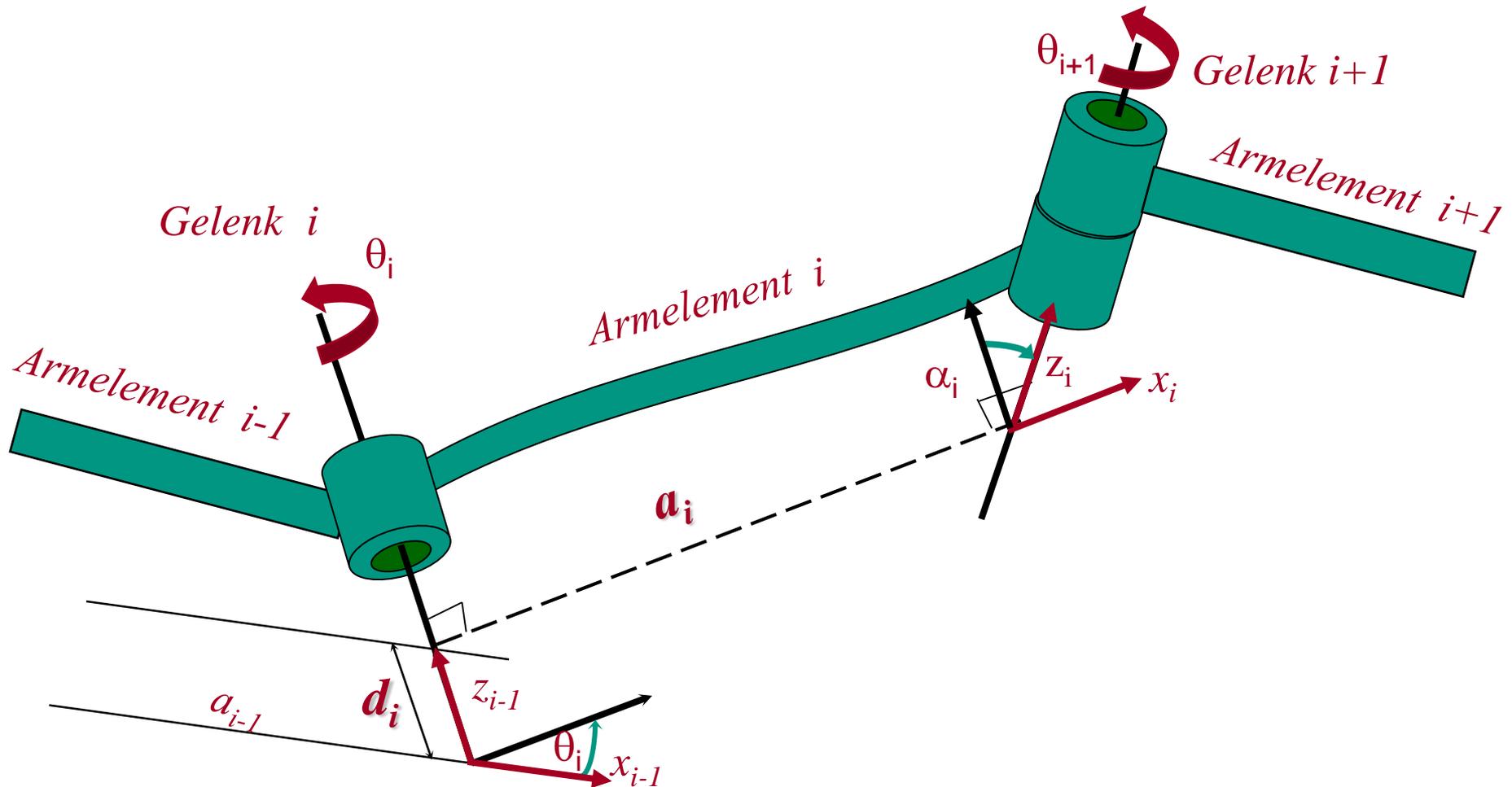
# DH-Konvention: Gelenkparameter

- Der **Gelenkabstand**  $d_i$  ist der Abstand zwischen der  $x_{i-1}$ -Achse und  $x_i$ -Achse entlang der  $z_{i-1}$  Achse.



# DH-Konvention: Gelenkparameter II

- Der **Gelenkwinkel**  $\theta_i$  ist der Winkel von  $x_{i-1}$  zu  $x_i$  **um**  $Z_{i-1}$ .



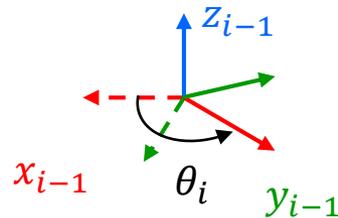
# Denavit-Hartenberg Parameter: DH-Parameter

Parameter	Symbol	Rotationsgelenk	Schubgelenk
Armelementlänge	$a$	invariant	invariant
Verwindung	$\alpha$	invariant	invariant
Gelenkabstand	$d$	invariant	<b>variabel</b>
Gelenkwinkel	$\theta$	<b>variabel</b>	invariant

# DH-Transformationsmatrizen

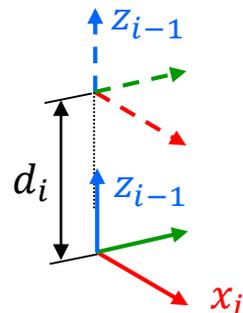
Transformation  $OKS_{i-1}$  zu  $OKS_i$

1. Eine **Rotation**  $\theta_i$  um die  $z_{i-1}$ -Achse, damit die  $x_{i-1}$ -Achse parallel zur  $x_i$ -Achse liegt.



$$R_{z_{i-1}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Eine **Translation**  $d_i$  entlang der  $z_{i-1}$ -Achse zu dem Punkt, wo sich  $z_{i-1}$  und  $x_i$  schneiden.

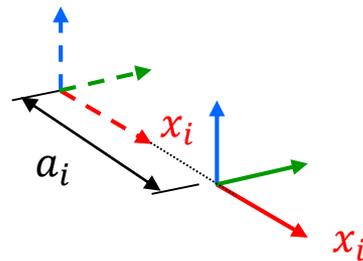


$$T_{z_{i-1}}(d_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# DH-Transformationsmatrizen II

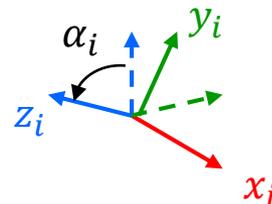
Transformation  $OKS_{i-1}$  zu  $OKS_i$

3. Eine **Translation**  $a_i$  entlang der  $x_i$ -Achse, um die Ursprünge der Koordinatensysteme in Deckung zu bringen.



$$T_{x_i}(a_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Eine **Rotation**  $\alpha_i$  um die  $x_i$ -Achse, um die  $z_{i-1}$ -Achse in die  $z_i$ -Achse zu überführen.



$$R_{x_i}(\alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# DH-Transformationsmatrizen III

Transformation  $OKS_{i-1}$  zu  $OKS_i$

$$\begin{aligned}
 A_{i-1,i} &= R_{z_{i-1}}(\theta_i) \cdot T_{z_{i-1}}(d_i) \cdot T_{x_i}(a_i) \cdot R_{x_i}(\alpha_i) = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cdot \cos \alpha_i & \sin \theta_i \cdot \sin \alpha_i & a_i \cdot \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cdot \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \cdot \sin \alpha_i & a_i \cdot \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

# Inverse DH-Transformation

Transformation  $OKS_i$  zu  $OKS_{i-1}$

$$\begin{aligned}
 A_{i-1,i}^{-1} &= A_{i,i-1} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 & -a_i \\ -\cos \alpha_i \cdot \sin \theta_i & \cos \theta_i \cdot \cos \alpha_i & \sin \alpha_i & -d_i \cdot \sin \alpha_i \\ \sin \theta_i \cdot \sin \alpha_i & -\sin \alpha_i \cdot \cos \theta_i & \cos \alpha_i & -d_i \cdot \cos \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

# Verkettung von DH-Transformationen

- Durch Verkettung der DH-Matrizen lässt sich die Lage der einzelnen **Koordinatensysteme bezüglich** des **Bezugskoordinatensystems** bestimmen.
- Lage des  $m$ -ten Koordinatensystems bezüglich der Basis:

$$S_{Basis,m}(\theta) = A_{0,1}(\theta_1) \cdot A_{1,2}(\theta_2) \cdot \dots \cdot A_{m-2,m-1}(\theta_{m-1}) \cdot A_{m-1,m}(\theta_m)$$

# Zusammenfassung: Bestimmung der DH Parameter

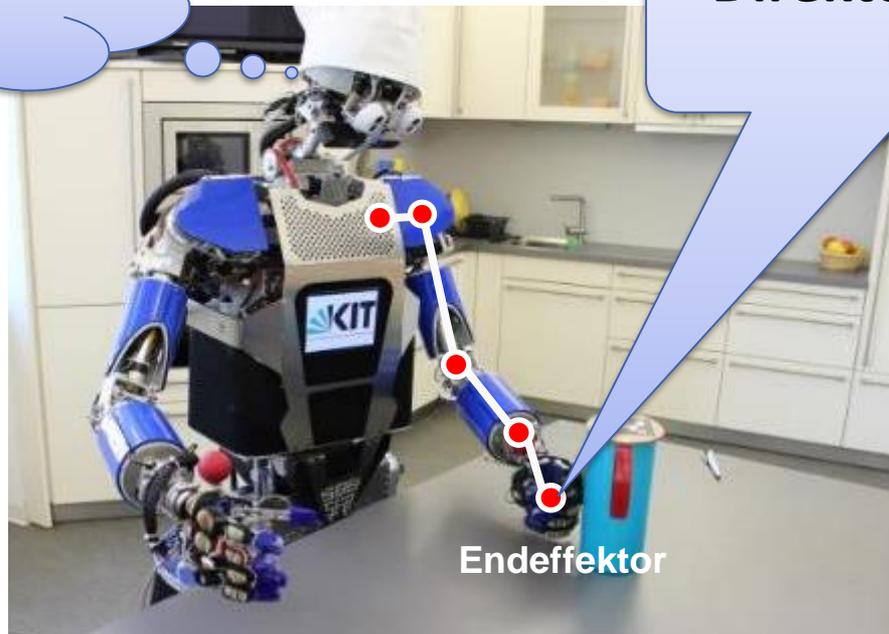
1. **Skizze** des Manipulators
2. Identifiziere und **nummeriere** die **Gelenke** (1, Letztes Glied =  $n$ )
3. Zeichne die **Achsen**  $z_{i-1}$  für jedes Gelenk  $i$
4. Bestimme die **Parameter**  $a_i$  zwischen  $z_{i-1}$  und  $z_i$
5. Zeichne die  $x_i$  -**Achsen**
6. Bestimme die **Parameter**  $\alpha_i$  (Verwindung um die  $x_i$ -Achsen)
7. Bestimme die **Parameter**  $d_i$  (Gelenkabstand)
8. Bestimme die **Winkel**  $\theta_i$  um  $z_{i-1}$ -Achsen
9. **Gelenk-Transformation-Matrizen**  $A_{i-1,i}$  - **verknüpfe** sie

# Inhalt

- Kinematisches Modell
  - Kinematische Kette
  - Denavit-Hartenberg Konvention
  - **Direktes Kinematisches Problem**
  - Beispiele
  - Jacobi-Matrizen
  - Singularitäten und Manipulierbarkeit
  - Repräsentation der Erreichbarkeit
  
- Geometrisches Modell
  - Einsatzbereiche
  - Klassifizierung
  - Beispiele

# Direktes kinematisches Problem

Wo ist meine  
Hand?



Direkte Kinematik:  
HIER!

## Direktes kinematisches Problem

- Aus den DH-Parametern und den Gelenkwinkeln soll die Stellung des Endeffektors (Tool Center Point: TCP) ermittelt werden.
- Die Stellung des Endeffektors (TCP) in Bezug auf das BKS ist gegeben durch:

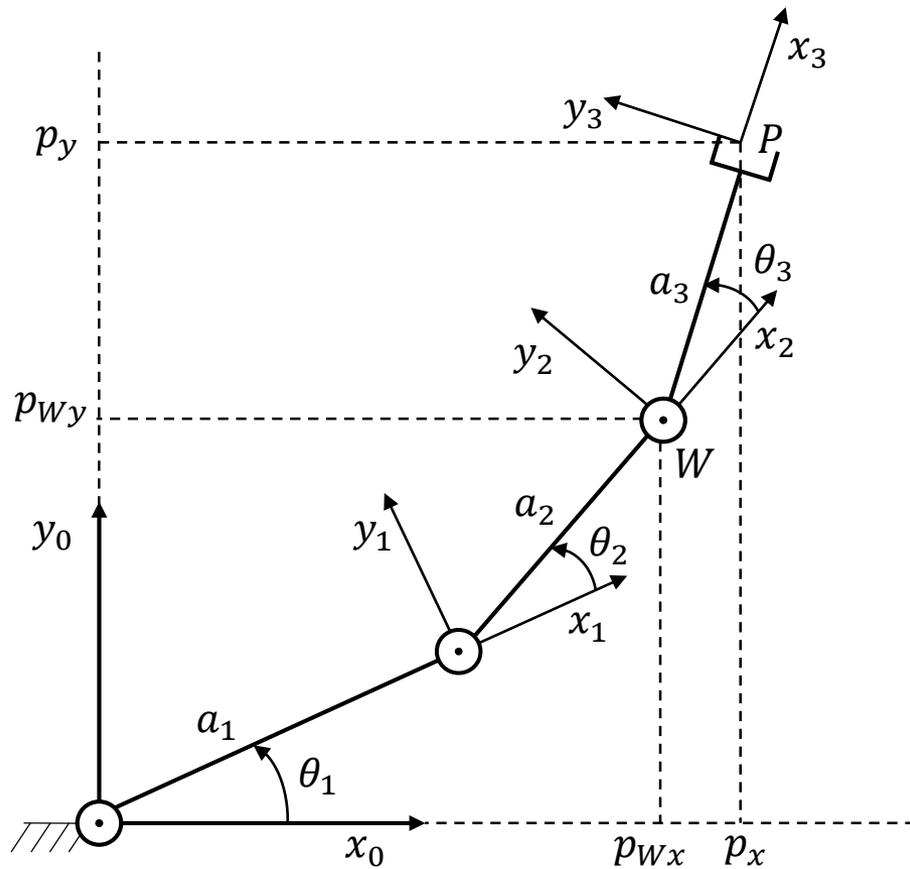
$$S_{Basis,Greifer}(\theta) = A_{0,1}(\theta_1) \cdot A_{1,2}(\theta_2) \cdot \dots \cdot A_{n-2,n-1}(\theta_{n-1}) \cdot A_{n-1,n}(\theta_n)$$

- Gelenkwinkel  $\theta_1, \dots, \theta_n$  sind vorgegeben → Stellung des TCP ergibt sich aus obiger Gleichung durch Einsetzen der Gelenkwinkelwerte

# Inhalt

- Kinematisches Modell
  - Kinematische Kette
  - Denavit-Hartenberg Konvention
  - Direktes Kinematisches Problem
  - **Beispiele**
  - Jacobi-Matrizen
  - Singularitäten und Manipulierbarkeit
  - Repräsentation der Erreichbarkeit
- Geometrisches Modell
  - Einsatzbereiche
  - Klassifizierung
  - Beispiele

# Beispiel 1



Gelenk	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	$a_1$	0	0	$\theta_1$
2	$a_2$	0	0	$\theta_2$
3	$a_3$	0	0	$\theta_3$

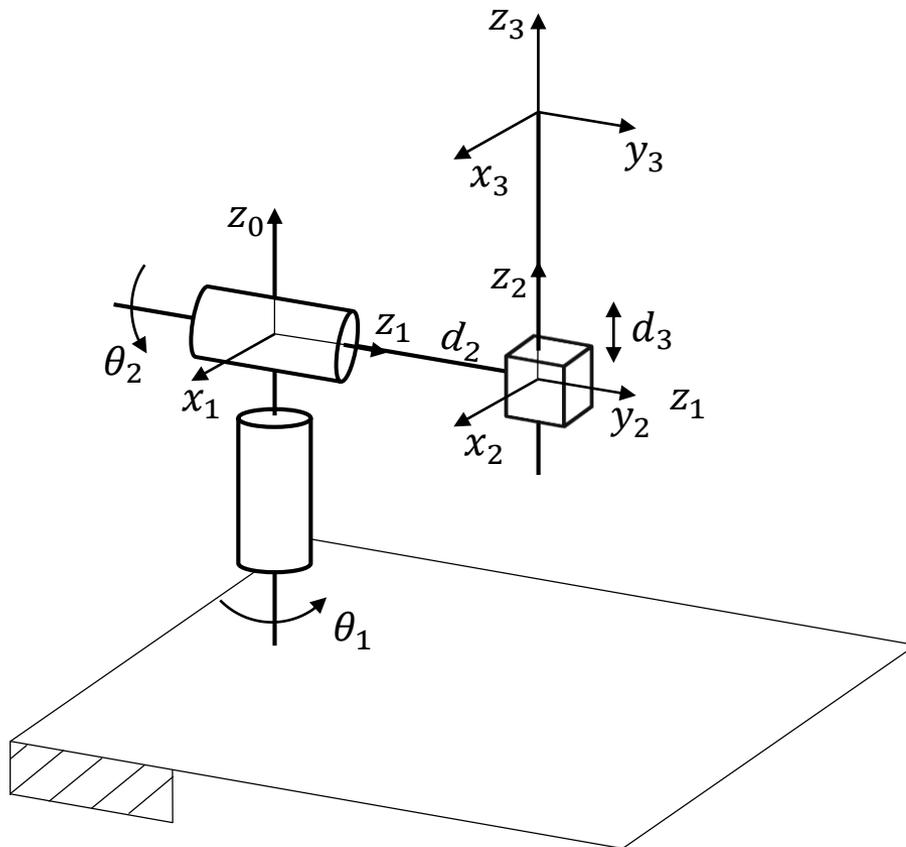
$$A_{i-1,i} = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & a_i c_i \\ s_i & c_i & 0 & a_i s_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Beispiel 1

$$A_{0,3}(\theta) = A_{0,1} \cdot A_{1,2} \cdot A_{2,3} = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■ Abkürzungen:  $c_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$ ,  $s_{123} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$

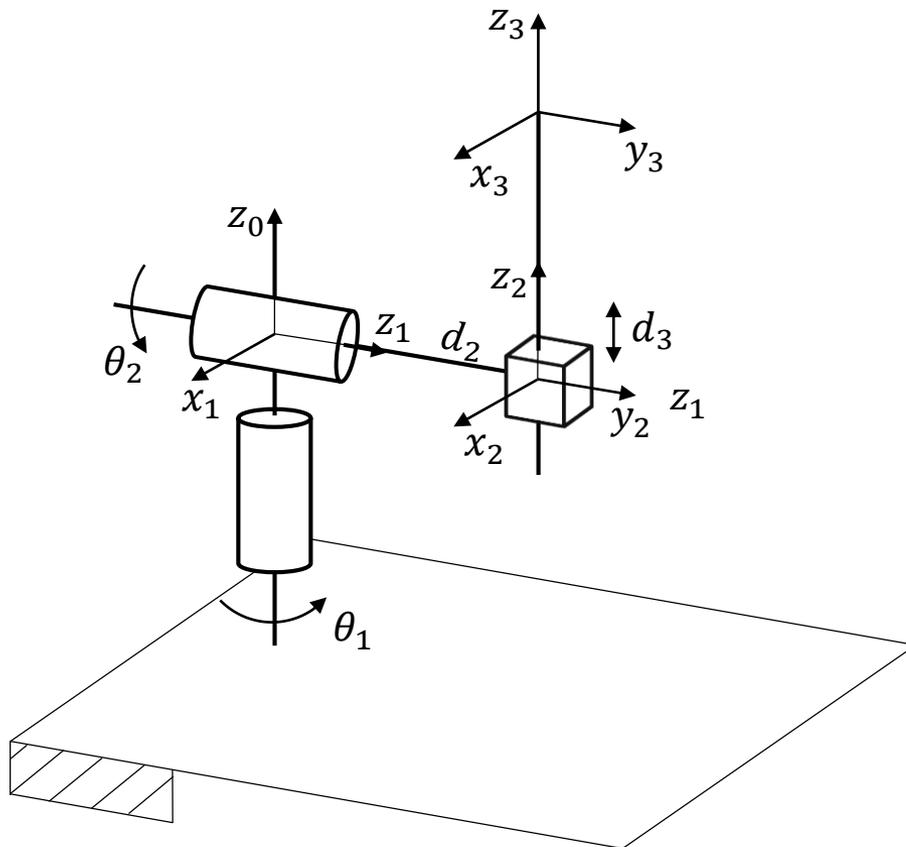
# Beispiel 2



Gelenk	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	-90	0	$\theta_1$
2	0	90	$d_2$	$\theta_2$
3	0	0	$d_3$	0

$$A_{0,1} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

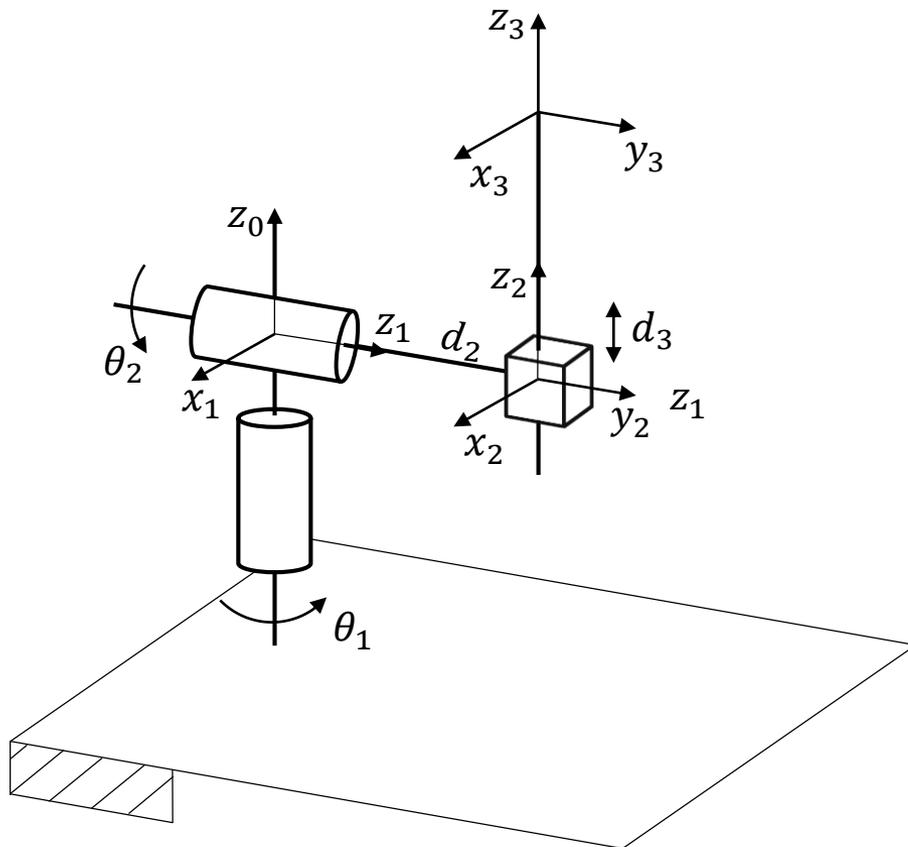
# Beispiel 2



Gelenk	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	-90	0	$\theta_1$
2	0	90	$d_2$	$\theta_2$
3	0	0	$d_3$	0

$$A_{1,2} = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Beispiel 2



Gelenk	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	-90	0	$\theta_1$
2	0	90	$d_2$	$\theta_2$
3	0	0	$d_3$	0

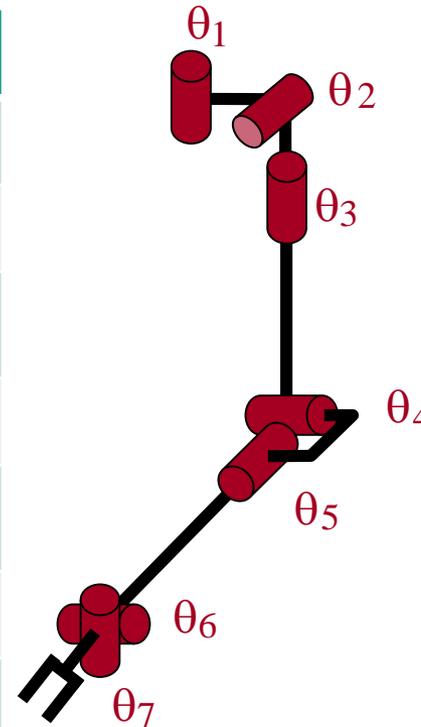
$$A_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Beispiel 2

$$A_{0,3}(\theta) = A_{0,1}A_{1,2}A_{2,3} = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -s_1 & c_1s_2 & c_1s_2d_3 - s_1d_2 \\ s_1c_2 & c_1 & s_1s_2 & s_1s_2d_3 + c_1d_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 & c_2d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# DH-Notation: Arm von ARMAR-I

Gelenk <sub>j</sub>	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$
1	$\theta_1$	30	$-90^\circ$	0
2	$\theta_2 - 90^\circ$	0	$-90^\circ$	0
3	$\theta_3 + 90^\circ$	0	$90^\circ$	223,5
4	$\theta_4$	0	$-90^\circ$	0
5	$\theta_5$	0	$90^\circ$	270,0
6	$\theta_6 + 90^\circ$	0	$-90^\circ$	0
7	$\theta_7$	140	$90^\circ$	0



# Inhalt

- Kinematisches Modell
  - Kinematische Kette
  - Denavit-Hartenberg Konvention
  - Direktes Kinematisches Problem
  - Beispiele
  - **Jacobi-Matrizen**
  - Singularitäten und Manipulierbarkeit
  - Repräsentation der Erreichbarkeit
  
- Geometrisches Modell
  - Einsatzbereiche
  - Klassifizierung
  - Beispiele

# Jacobi-Matrix der Vorwärtskinematik

## ■ Vorwärtskinematik:

**Gelenkwinkelstellung** → **End-Effektor Pose**

## ■ Wie sehen verwandte Beziehungen aus?

■ Gelenkwinkelgeschwindigkeiten → End-Effektor-Geschwindigkeit

■ Drehmomente in Gelenkwinkeln → End-Effektor-Kräfte und –Momente

## ■ **Ansatz:** Vorwärtskinematik ableiten (→ Jacobi-Matrix)

## Erinnerung: Jacobi-Matrix

- Gegeben eine differenzierbare Funktion

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

- Die **Jacobi-Matrix** enthält sämtliche partiellen Ableitungen erster Ordnung von  $f$ . Für ein  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  gilt:

$$J_f(\mathbf{a}) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Dabei bezeichnen  $f_1, \dots, f_m$  die Komponentenfunktionen von  $f$  und  $x_1, \dots, x_n$  die Koordinaten in  $\mathbb{R}^n$ .

# Jacobi-Matrix der Vorwärtskinematik

- **Problem:** Vorwärtskinematik ist matrixwertig

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow SE(3)$$

- Jacobi-Matrix nicht definiert

- **Lösung:** Vektorwertige Repräsentation wählen,  
z.B. Roll-Pitch-Yaw

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^6$$

## End-Effektor Geschwindigkeiten

- **Annahme:** Die kinematische Kette bewege sich entlang einer Trajektorie

$$\theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

- Dann gilt für die End-Effektor Pose  $x(t) \in \mathbb{R}^6$  zum Zeitpunkt  $t$ :

$$x(t) = f(\theta(t))$$

- Die End-Effektor-Geschwindigkeit hängt linear von den Gelenkgeschwindigkeiten ab (**Kettenregel**):

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial f(\theta(t))}{\partial t} = J_f(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t)$$

# End-Effektor Geschwindigkeiten

- Die Jacobi-Matrix setzt kartesische End-Effektor-Geschwindigkeiten in Relation zu Gelenkwinkelgeschwindigkeiten

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = J_f(\boldsymbol{\theta}(t)) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}(t)$$

- Die folgenden Probleme können mit dieser Beziehung gelöst werden
  1. Gegeben eine kartesische End-Effektor-Geschwindigkeit, welche Gelenkwinkelgeschwindigkeiten sind notwendig, um diese zu realisieren?
  2. Gegeben die Gelenkwinkelgeschwindigkeiten, welche kartesische End-Effektor-Geschwindigkeit wird damit realisiert?

# Kräfte und Momente am End-Effektor

- **Annahme:** Die kinematische Kette bewege sich entlang einer Trajektorie

$$\theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

- Die geleistete Arbeit muss unabhängig vom Bezugssystem konstant bleiben (**Reibung vernachlässigt**)

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\theta}(t)^T \cdot \tau(t) dt = W = \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}(t)^T \cdot F(t) dt$$

- Mit:

$\dot{\theta}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , Gelenkgeschwindigkeiten

$\tau: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , Drehmomente in Gelenken

$\dot{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^6$ , End-Effektor Geschwindigkeit

$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^6$ , Kraft-Momenten-Vektor am End-Effektor

## Kräfte und Momente am End-Effektor

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\theta}(t)^T \cdot \tau(t) dt = W = \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}(t)^T \cdot F(t) dt$$

- Die Beziehung muss für jedes Zeitintervall  $[t_1, t_2]$  gelten, daher:

$$\dot{\theta}(t)^T \cdot \tau(t) = \dot{x}(t)^T \cdot F(t)$$

- Bekannte Beziehung zwischen End-Effektor-Geschwindigkeit und Jacobi-Matrix:

$$\dot{\theta}(t)^T \cdot \tau(t) = \dot{\theta}(t)^T \cdot J_f^T(\theta(t)) \cdot F(t)$$

- Da  $\dot{\theta}(t)$  beliebig ist, folgt:

$$\tau(t) = J_f^T(\theta(t)) \cdot F(t)$$

## Kräfte und Momente am End-Effektor

- Die Jacobi-Matrix setzt Kräfte und Momente am End-Effektor in Relation zu Drehmomenten in den Gelenken

$$\tau(t) = J_f^T(\theta(t)) \cdot F(t)$$

- Die folgenden Probleme können mit dieser Beziehung gelöst werden
  1. Gegeben eine Kraft am End-Effektor, welche Drehmomente müssen in den Gelenken wirken, um dieser Kraft zu widerstehen?
  2. Gegeben die Drehmomente in den Gelenken, welche Kräfte und Momente wirken dadurch am (fixierten) End-Effektor?

# Berechnung der Jacobi-Matrix

- Jede Spalte der Jacobi-Matrix korrespondiert zu einem Gelenk  $\theta_i$  der kinematischen Kette

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial \theta_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times n}$$

- **Ansatz:** Die numerische Berechnung der Jacobi-Matrix verläuft spaltenweise

# Berechnung der Jacobi-Matrix

## ■ 1. Fall: **Translationsgelenk**

- **Annahme:** Das  $j$ -te Gelenk führe eine Translation in Richtung des **Einheitsvektors**  $\mathbf{v}_j \in \mathbb{R}^3$  durch.
- Dann gilt:

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_j \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

## ■ 2. Fall: **Rotationsgelenk**

- **Annahme:** Das  $j$ -te Gelenk führe eine Rotation um die Rotationsachse  $\mathbf{v}_j \in \mathbb{R}^3$ , an der Position  $\mathbf{p}_j \in \mathbb{R}^3$  durch.
- Dann gilt:

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_j \times (f(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{p}_j) \\ \mathbf{v}_j \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

# Zusammenfassung: Jacobi-Matrix

## ■ Jacobi Matrix:

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial \theta_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times n}$$

## ■ Eigenschaften

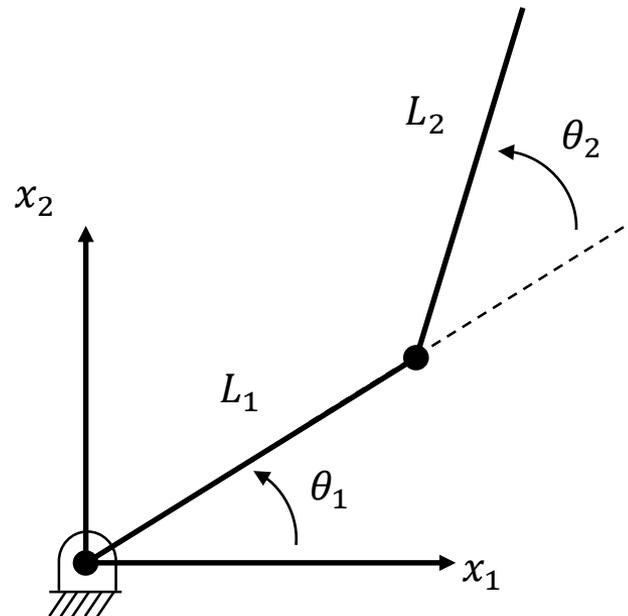
- $J_f$  beschreibt die Beziehung zwischen
  - Geschwindigkeit der Gelenkwinkel (n-dimensional) und Geschwindigkeit des Endeffektors (6-dimensional)
  - Drehmomente in Gelenken (n-dimensional) und Kräfte und Momente am Endeffektor (6-dimensional)
- Jacobi-Matrix ist nur gültig für eine bestimmte Gelenkwinkelkonfiguration

# Jacobi-Matrix: Beispiel

- Manipulator mit zwei Gelenken  $\theta_1, \theta_2$
- Vorwärtskinematik

$$x_1 = L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$x_2 = L_1 \sin\theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2).$$



## Jacobi-Matrix: Beispiel II

### ■ Vorwärtskinematik

$$x_1 = L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$x_2 = L_1 \sin\theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

### ■ Ableitung

$$\dot{x}_1 = -L_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1 - L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\dot{x}_2 = L_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

### ■ Jacobi Matrix

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -L_1 \sin\theta_1 - L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}}_{J_1(\theta)} \underbrace{\begin{pmatrix} -L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}}_{J_2(\theta)} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}$$

## Jacobi-Matrix: Beispiel III

### ■ Endeffektor-Geschwindigkeit (TCP-Geschwindigkeit)

$$\mathbf{v}_{TCP} = J_1(\boldsymbol{\theta})\dot{\theta}_1 + J_2(\boldsymbol{\theta})\dot{\theta}_2$$

- Solange  $J_1(\boldsymbol{\theta})$  und  $J_2(\boldsymbol{\theta})$  **nicht linear abhängig** sind, kann  $\mathbf{v}_{TCP}$  in jede beliebige Richtung in der  $x_1x_2$ -Ebene erzeugt werden

### ■ Singularitäten

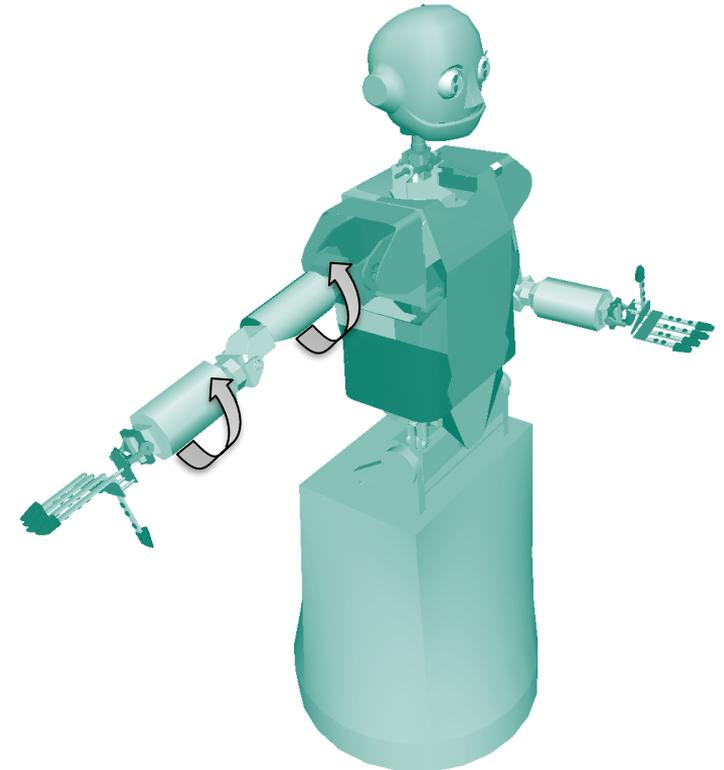
- $J_1(\boldsymbol{\theta})$  und  $J_2(\boldsymbol{\theta})$  linear abhängig  $\rightarrow J(\boldsymbol{\theta})$  wird singulär
- z.B. bei  $\theta_2 = 0^\circ$
- Die möglichen Bewegungen des Endeffektors sind eingeschränkt

# Inhalt

- Kinematisches Modell
  - Kinematische Kette
  - Denavit-Hartenberg Konvention
  - Direktes Kinematisches Problem
  - Beispiele
  - Jacobi-Matrizen
  - **Singularitäten und Manipulierbarkeit**
  - Repräsentation der Erreichbarkeit
  
- Geometrisches Modell
  - Einsatzbereiche
  - Klassifizierung
  - Beispiele

# Singularitäten

- Eine kinematische Kette ist in einer **singulären Konfiguration**, wenn die zugehörige Jacobi-Matrix nicht vollen Rang hat
  - Zwei oder mehr Spalten von  $J_f$  sind linear abhängig
- Die Jacobi-Matrix ist nicht invertierbar
  - Bestimmte Bewegungen unmöglich
- In der Umgebung von Singularitäten können **große Gelenkgeschwindigkeiten** nötig werden, um eine End-Effektor-Geschwindigkeit zu halten.

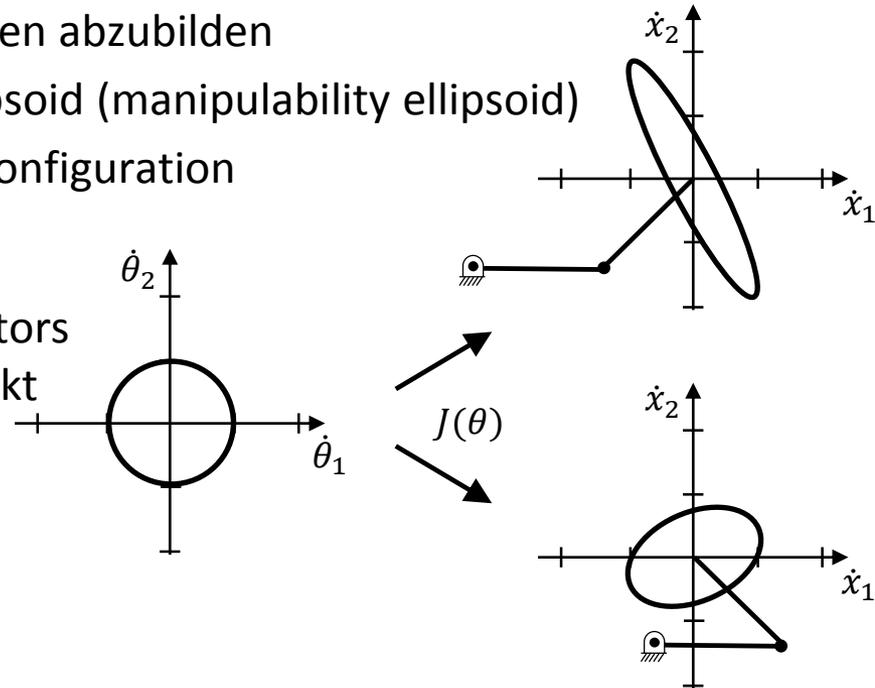


# Manipulierbarkeit (Manipulability)

- Ein Maß für die Bewegungsfreiheit „manipulability“ des Endeffektors
- **Manipulierbarkeits-Ellipsoid**
  - Nutze  $J(\theta)$  um Einheitskreis der Gelenkwinkel-Geschwindigkeiten in den Raum der Endeffektor-Geschwindigkeiten abzubilden
  - Resultat: Manipulierbarkeits-Ellipsoid (manipulability ellipsoid)
  - Abhängig von der Gelenkwinkelkonfiguration

## ■ Analyse

- **Kreis:** Bewegungen des Endeffektors in alle Richtungen uneingeschränkt möglich
- **Degenerierte Fälle (Line):** Endeffektor-Bewegung ist eingeschränkt



# Manipulierbarkeit: Eigenwertanalyse

■ Konstruiere  $A(\theta) = J(\theta)J(\theta)^T \in R^{n \times n}$

■  $A(\theta)$  ist dann:

- Quadratisch
- Symmetrisch
- positiv definit
- Invertierbar

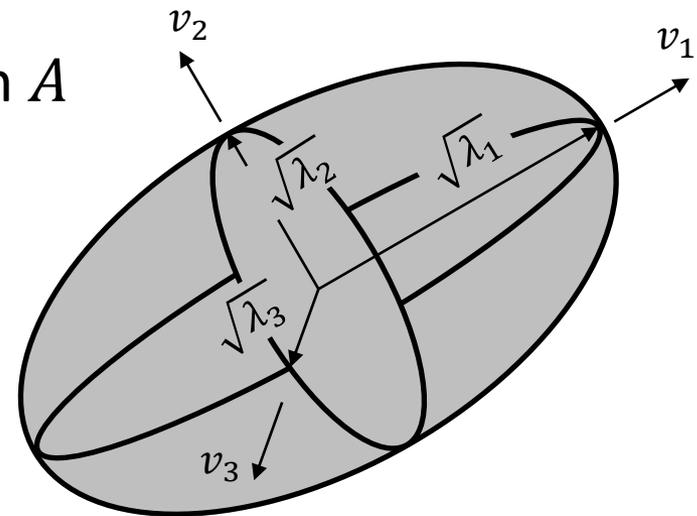
■ Eigenwerte  $\lambda$  und Eigenvektoren  $v$  von  $A$

$$Av = \lambda v$$

$$(\lambda I - A)v = 0$$

■ Singulärwerte

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$$



# Manipulierbarkeit: Berechnung

## ■ Maße für die Manipulierbarkeit

### ■ **Kleinsten Singulärwert**

$$\mu_1(\theta) = \sigma_{\min}(A(\theta))$$

### ■ **Inverse Kondition**

$$\mu_2(\theta) = \frac{\sigma_{\min}(A(\theta))}{\sigma_{\max}(A(\theta))}$$

### ■ **Determinante**

$$\mu_3(\theta) = \det A(\theta)$$

## ■ Einsatz:

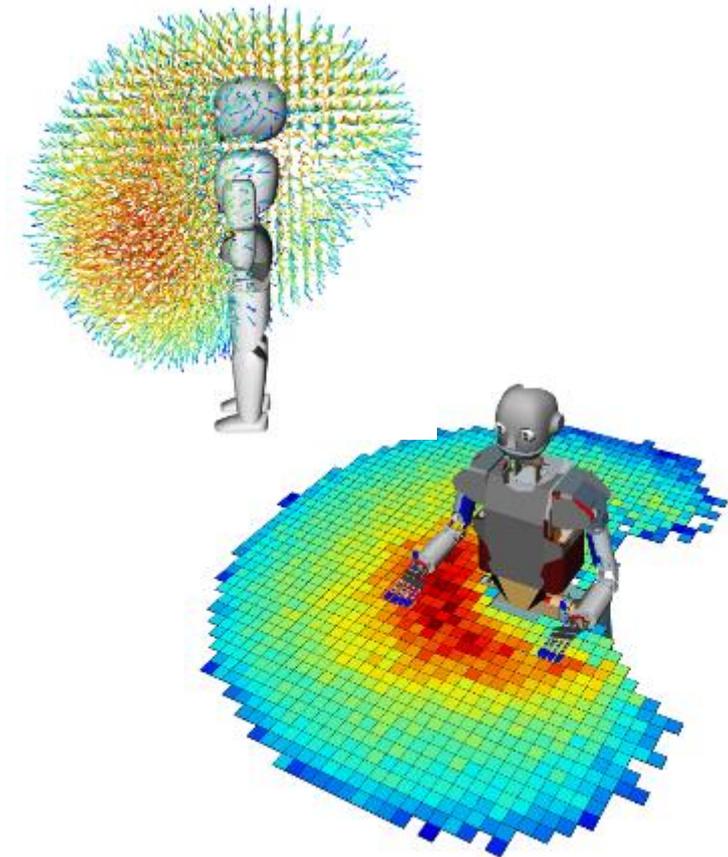
- Analyse von Gelenkwinkelkonfigurationen
- Vermeidung von Singularitäten

# Inhalt

- Kinematisches Modell
  - Kinematische Kette
  - Denavit-Hartenberg Konvention
  - Direktes Kinematisches Problem
  - Beispiele
  - Jacobi-Matrizen
  - Singularitäten und Manipulierbarkeit
  - **Repräsentation der Erreichbarkeit**
- Geometrisches Modell
  - Einsatzbereiche
  - Klassifizierung
  - Beispiele

# Repräsentation der Erreichbarkeit (I)

- Erreichbarer Teil des Arbeitsraums für den Roboter in  $\mathbb{R}^6$
- Approximation durch 6-dimensionales Gitter
- Eintrag in jeder Gitterzelle:
  - **Erreichbarkeit (Reachability):**  
Binär: Existiert mind. eine Gelenkwinkelkonfiguration, so dass der TCP innerhalb der 6D-Gitterzelle liegt.
  - **Manipulierbarkeit (Manipulability):**  
Maximaler Manipulierbarkeitswert einer Gitterzelle, z.B.  $\mu_1(\theta)$

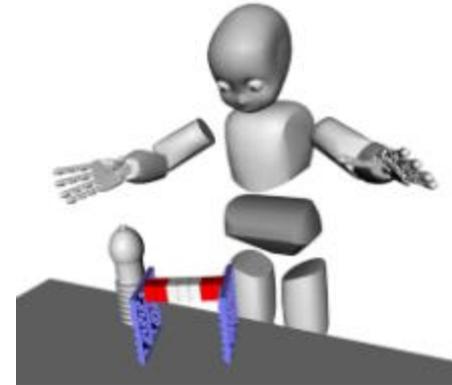


Visualisierung der Erreichbarkeit bzw. Manipulierbarkeit für die Roboter iCub und Armar-III

# Repräsentation der Erreichbarkeit (II)

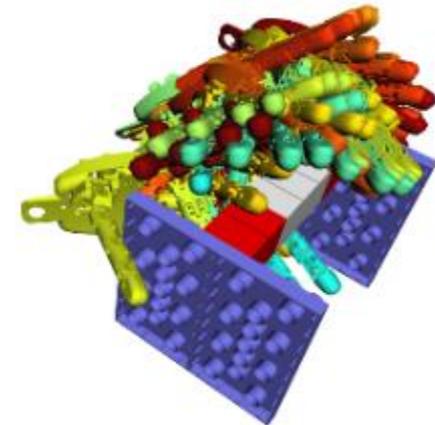
## ■ Erstellung

- Offline-Prozess in Simulation
- Taste alle Gelenkwinkel ab
  - in  $x$  Schritten (z.B.  $x = 5^\circ$ )
  - Bestimme die Lage des TCP über Vorwärtskinematik
  - Bestimme Gitterzelle und setze den Eintrag



## ■ Anwendung

- Vorberechnete Erreichbarkeitsinformationen
- Schnelle Entscheidung, ob eine Pose mit dem Endeffektor erreichbar ist.  
Aufwand:  $O(1)$
- Kann zur Griffselektion genutzt werden



Nicht erreichbare Griffe können effizient aussortiert werden.

# Inhalt

## ■ Kinematisches Modell

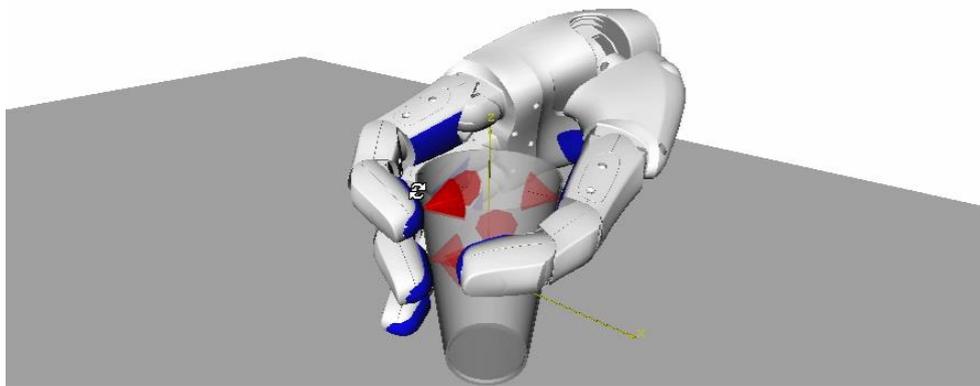
- Kinematische Kette
- Denavit-Hartenberg Konvention
- Direktes Kinematisches Problem
- Beispiele
- Jacobi-Matrizen
- Singularitäten und Manipulierbarkeit
- Repräsentation der Erreichbarkeit

## ■ Geometrisches Modell

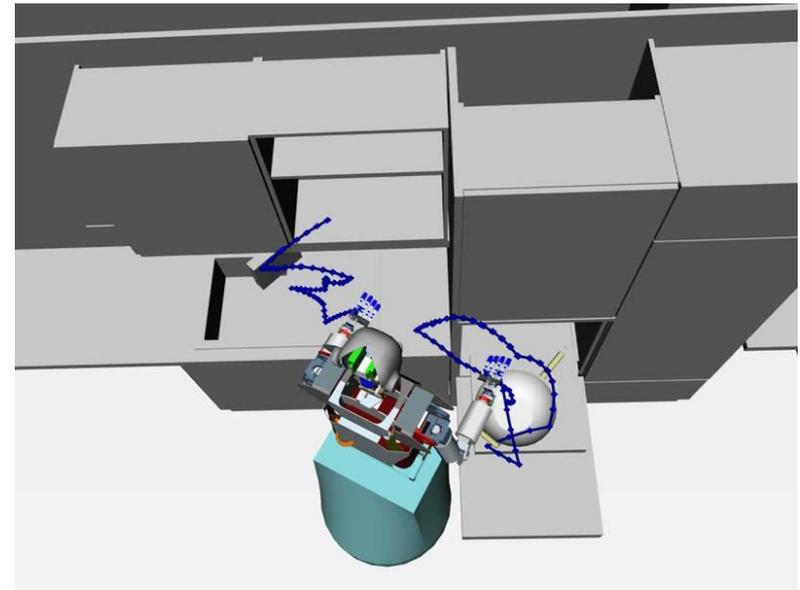
- Einsatzbereiche
- Klassifizierung
- Beispiele

# Geometrisches Modell: Motivation

## ■ Kollisions- und Kontaktberechnung



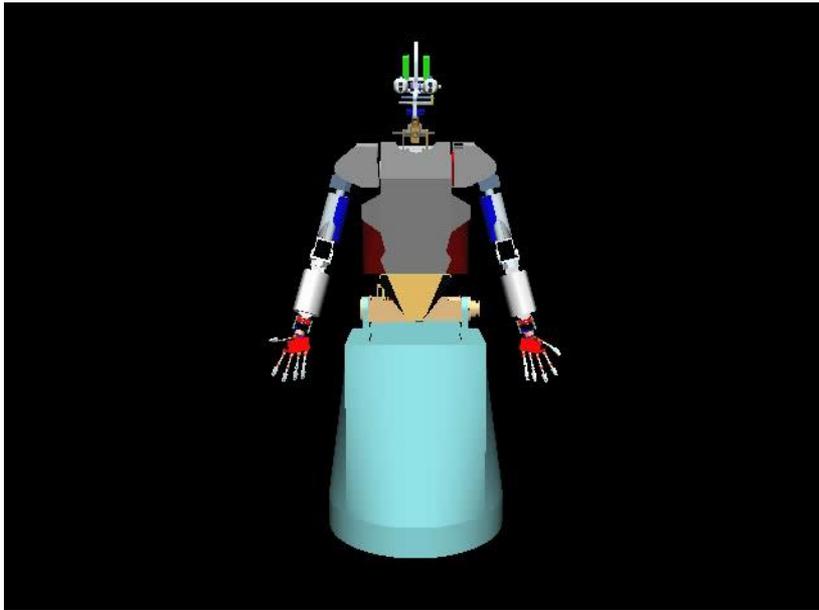
Greifen



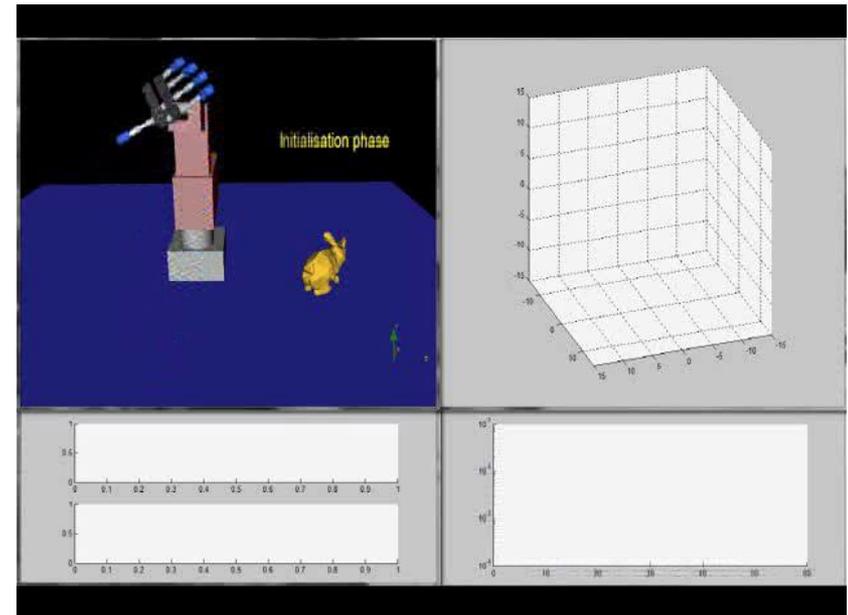
Bewegungsplanung

# Geometrisches Modell: Motivation

## ■ Simulation



Imitation

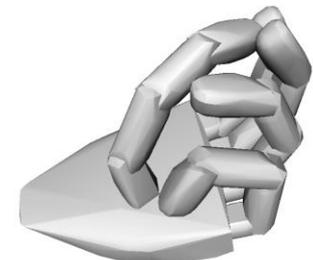
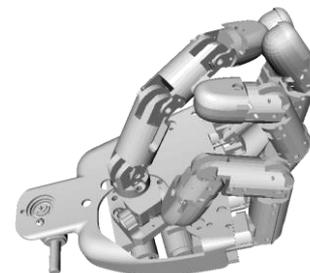
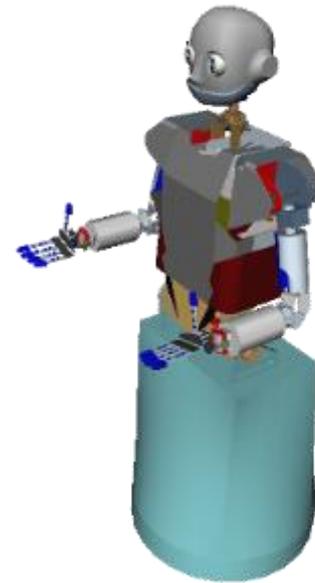


Haptische Exploration

# Geometrisches Modell

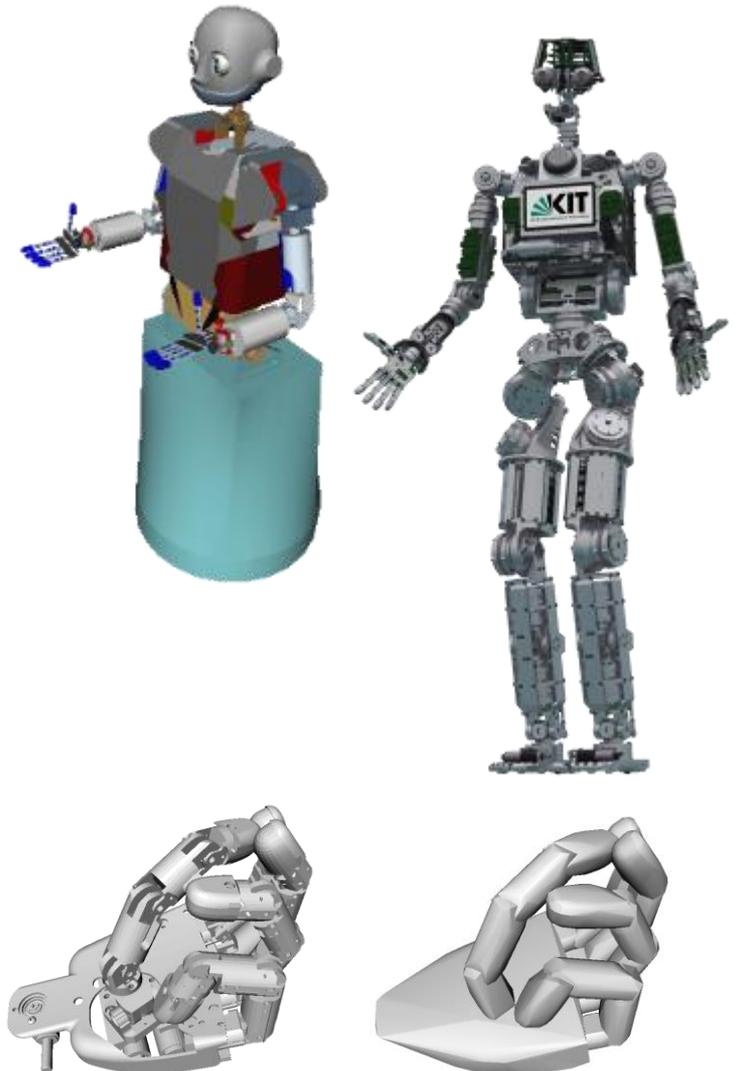
## Einsatzbereiche

- Graphische **Darstellung** von Körpern
- Ausgangspunkt der **Abstandsmessung** und **Kollisionserkennung**
- Grundlage zur Berechnung der **Bewegungen** von Körpern
- Grundlage zur Ermittlung der wirkenden **Kräfte** und **Momente**



# Geometrisches Modell - Klassifizierung

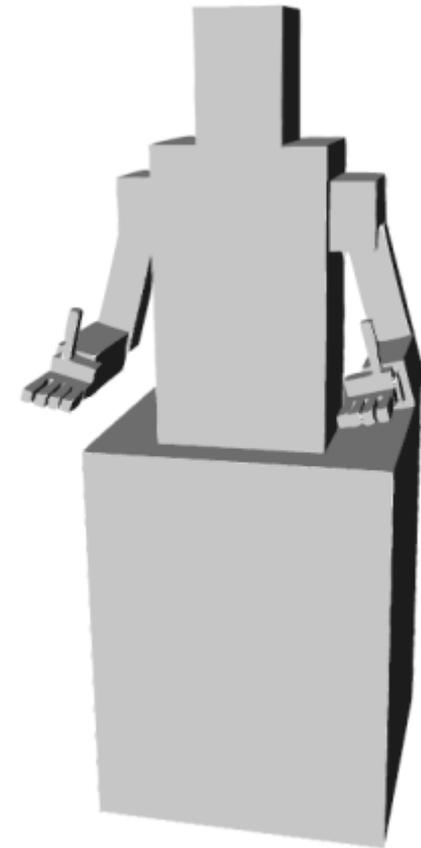
- Klassifizierung nach **Raum**
  - 2D Modelle
  - 2,5D Modelle
  - 3D Modelle
- Klassifizierung nach **Grundprimitiven**
  - Kanten- bzw. Drahtmodelle
  - Flächen- bzw. Oberflächenmodelle
  - Volumenmodell



# ARMAR-III: Blockwelt

- Die Körper werden durch **einhüllende Quader** dargestellt.
- wird in den ersten Schritten der Kollisionsvermeidung benutzt.

**Klasse:** 2,5D, Volumen bzw. Flächen

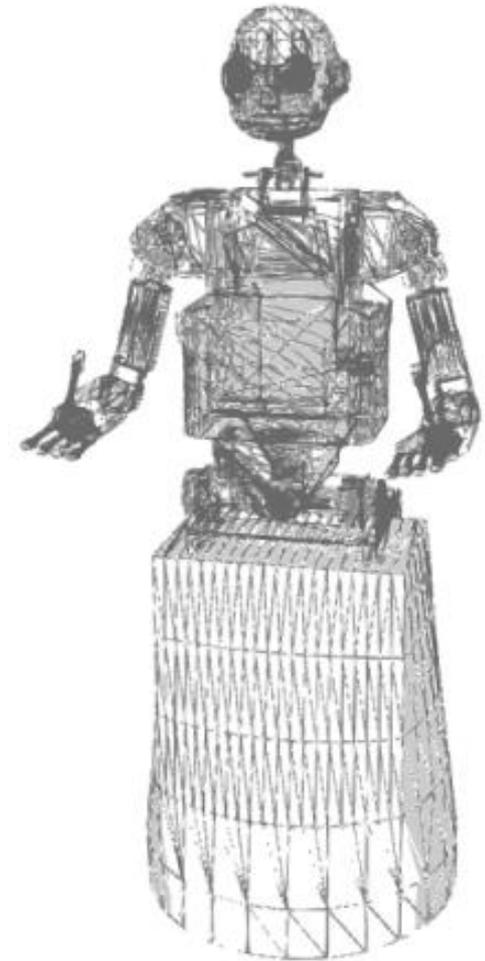


ARMAR-III Blockwelt-Modell

## ARMAR-III: Kantenmodell

- Die Körper werden durch **Polygonzüge** (Kanten) dargestellt.
- wird zur schnellen Visualisierung benutzt.

**Klasse:** 3D, Kanten bzw. Flächen

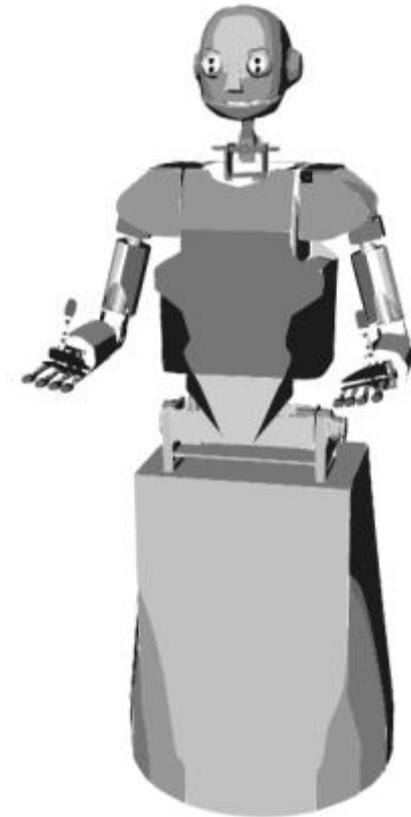


ARMAR-III Kantenmodell

# ARMAR-III: Volumenmodell

- Die Körper werden **genau dargestellt**.
- wird für die Ermittlung der genauen Werte der Kollisionserkennung benutzt.
- Darstellung in der Animation.

**Klasse:** 3D, Volumen



ARMAR-III Volumenmodell